117	Groupe orthogonal d'un ev Euclidien de dimension 2 ou 3.	Classification en dimension 3	Monier MPSI Mercier Ladegaillerie

Prérequis: généralités sur le groupe orthogonal en dimension qcq: endomorphisme orthog., matrice orthog., gpe spécial orthogonal.

I. Groupe orthogonal en dimension 2.

Soit E ev Eucl. de dim.2. On suppose que E est orienté (il suffit de choisir arbitrairement une BON et de la déclarer directe), et que l'on se place dans B une BOND.

Prop 1: $O_2(\mathbb{R}) = \underbrace{\{R_\theta;\theta\in\mathbb{R}\}}_{SO_2(\mathbb{R})} \cup \{S_\varphi;\varphi\in\mathbb{R}\}$, où:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \ ;\ S_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$SO_2(\mathbb{R}) = \{R_\theta;\theta\in\mathbb{R}\}$ est un groupe **commutatif**, (Lad) et isomorphe à $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z},+)$.

Exercice: Mq $R_\theta\circ S_\varphi = S_{\theta+\varphi}$, et que $S_\varphi\circ R_\theta = S_{\varphi-\theta}$ (ex.10.4.1 p.368)

Def 1: Soit θ∈ℝ. L'endomorphisme de E dont la matrice dans B est R_θ est appelé la **rotation d'angle θ**, et on la note Rot_θ.
Application: La notion de rotation permet de définir les angles orientés de vecteurs (mod 2π), ainsi que celle d'angle polaire d'un vecteur et d'une droite (mod π)(5).

Def 2: Soit φ∈ℝ. L'endomorphisme de E dont la matrice dans B est S_φ est appelé la **réflexion par rapport à la droite vect. D d'angle polaire** $\frac{\varphi}{2}$, et on la note $Réf_\varphi$.

Les isométries vectorielles du plan sont soit des rotations, soit des réflexions.

Prop 2: Classification des endomph orthog de E₂

. $SO(E_2) = \{Rot_\theta;\theta\in\mathbb{R}\}$ (7)

. $O(E_2) - SO(E_2) = \{Réf_D; D$ droite vectorielle de E$\}$

Prop 3: Toute rotation est décomposable, d'au moins une manière, en **produit de réflexions.** (10)
∀r rotation, s réflexion ∈ E_2, ∃!t réflexion tq. $r = t\circ s$.

Prop 4 (Mercier p.146) : $r\in SO(E) \Rightarrow Inv(r) = \{\vec{0}\}$.

$s_D \in O(E)\setminus SO(E) \Rightarrow Inv(s_D) = D$.

Prop 5(Mercier)**: Classification par invariants**:
Soit $f\in O(E)$
dim Invf = 2 ⇔ f = Id
dim Invf = 1 ⇔ f = S_D (Réflex° - Sym. orthog / droite)
dim Invf = 0 ⇔ f = R_θ (distincte de Id)

II. Groupe orthogonal en dimension 3.

Def 3: Soient u∈E_3 tq $\|u\| = 1$, $\vec{\Delta}$ l'axe dirigé et orienté par u, et θ∈ℝ. On appelle **rotation d'axe** $\vec{\Delta}$ **et d'angle θ**, et on note $Rot_{\vec{\Delta},\theta}$ l'endomorphisme de E_3 dont la matrice dans une BOND (u,v,w) commençant par u est:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{Rot_\theta} & \\ 0 & & \end{matrix}$$

Prop6: Classification des endomph orthog de E₃.
Soit $f\in O(E_3)$, $f\neq Id$.
> Si $\det(f) = 1$, alors f est une **rotation** de E_3

$SO(E) = \{r_{\vec{\Delta}}\ ;\ \vec{\Delta}$ droite vectorielle$\}$.

> Si $\det(f) = -1$, alors:

-ou bien f est une **réflexion** de E_3

-ou bien f est la **composée d'un rotation de E₃ et de la réflexion par rapport au plan orthogonal à l'axe** de cette rotation.

$O(E)\setminus SO(E) =$

$\{S_{\vec{P}}\ ;\ \vec{P}$ plan vectoriel$\} \cup \underbrace{\{S_{\vec{P}}\circ r_{\vec{\Delta}}\ ;\ \vec{P} = \vec{\Delta}^{\perp}\ ,\ \vec{\Delta}\text{ droite vect}\}}_{\text{"autorotation"}}$

Exercice: Reconnaître l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est:

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Prop 7: Tout endomorphisme orthogonal de E_3 est **décomposable en produit d'au plus 3 réflexions.** (6)

Prop 8: (Mercier p.152)**: Classification par invariants:**
Soit $f\in O(E)$
dim Invf = 3 ⇔ f = Id
dim Invf = 2 ⇔ f = S_P
dim Invf = 1 ⇔ f = R_D
dim Invf = 0 ⇔ f = $R_D\circ S_{D^\perp}$

III. Notes

Différences entre la dim 2 et la dim 3 *(pas de sources)*.

En **dimension 2** seulement, les **rotations commutent.**
En dim 3, il faut des conditions: même axe, ou retournements (1/2 tours) d'axes sécants et orthogonaux.

En dimension 2, la forme normale de la matrice d'une **rotation**, de la forme

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

est atteinte dans n'importe quelle BOND.
En dimension 3, pour obtenir la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

il faut que le 1er vecteur de base soir un vecteur directeur de l'axe de rotation.

En dimension 2, l'angle de la rotation $R_{\theta 1} \circ R_{\theta 2}$ est : $\theta = \theta 1 + \theta 2$.
En dimension 3, $\theta \neq \theta 1+\theta 2$, il faut calculer θ par $\mathrm{tr}(R_{\theta 1} \circ R_{\theta 2}) = 1+2\cos\theta$.

Caractérisation matricielle d'une symétrie:
$\det A = -1$ et $M^2 = Id$.
Une réflexion est déterminée par son plan invariant.

Notes numérotées:

(5)**Angles orientés de vecteurs**: u, v $\in E_2$-{0}, $U = \frac{u}{\|u\|}$, $V = \frac{v}{\|v\|}$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$, unique modulo 2π, tq $Rot_\theta(U) = V$, on notera $\theta = \widehat{(u,v)}$.

Angle polaire d'un vecteur: Si on note la BON $B = (i, j)$
Pour $u \in E_2$-{0}, il s'agit de l'angle $\widehat{(i,u)}$.
Angle polaire d'une droite: c'est l'angle polaire d'un vecteur directeur de cette droite, il est défini modulo π.

(6) Généralisation: **Théorème de Cartan-Dieudonné**: (Mercier p.148) Soit E un plan vectoriel euclidien (de dimension n). Les réflexions engendrent $O(E)$. Si $n=\dim(E)\geq 2$, toute application orthogonale de E s'écrit comme produit de moins de n réflexions. (démo par récurrence sur n=dim(E)).

(7) (Cours de Danièle Gérard, pas de source):
Le groupe SO(E) = $O^+(E)$ –rotations du plan- est un groupe, et **il n'y a qu'en dim°2 qu'il soit commutatif**, c'est ce qui va donner les angles orientés de vecteurs.

(9) (Ladegaillerie) L'une des réflexions de la décomposition peut être choisie arbitrairement. Les réflexions engendrent donc le groupe $O(E_2)$.

IV. Prérequis: Galités sur le groupe orthogonal en dimension qcq..

Soit (E,<,>) un ev. Euclidien de dimension n.

A. Endomorphisme orthogonal. O(E)

Def 1 : Un endomorphisme f de E est dit **orthogonal** ssi f **conserve le produit scalaire**, c'est-à-dire ssi :
$\forall (x,y) \in E^2, \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.
On note O(E) l'ensemble des endomph orthogonaux de E.

Remarques : [+] Un projecteur orthogonal n'est PAS un end. orthog.

Prop 1 : Soit f∈L(E). Les ptés suivantes sont équivalentes.
(i) $f \in O(E)$
(ii) $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$ [1]

Rque: Les endomph. orthog. sont aussi **appelés isométries vectorielles.** [Lad]
Exple: Les réflexions (sym. ortho par rapport à un hyperplan de E).

Prop 2: *Soit f∈L(E). Les ptés suivantes sont équivalentes.*
(i) $f \in O(E)$
*(ii)L'image par f d'une BON de E est une **BON de E**.*
(iii)∃une BON B de E tq. $f(B)$ est une BON de E.

Prop 3: $(O(E), \circ)$ est un **groupe.** [2]

On va voir comment cela se traduit du pt de vue matriciel:

B. Matrice orthogonale. $O_n(\mathbb{R})$

Def 2: $A \in M_n(\mathbb{R})$ [3] est dite orthogonale ssi elle représente un endomph orthogonal (base canonique).
On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des **matrices orthogonales** de $M_n(\mathbb{R})$.

Prop 4: **Caractérisation matricielle.** Les assertions suivantes sont équivalentes:
(i)$A \in O_n(\mathbb{R})$
(ii) $({}^t A) A = I_n$
(iii) $A({}^t A) = I_n$
(iv)Pour tt B BON de E, l'endomorphisme f représenté par A dans B est orthogonal.
(v)Il existe une BON ds laquelle l'endomph f représenté par A est orthogonal.
(vi)Les colonnes de A forment une BON de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel.

(v) *Même chose pour les lignes ds $M_{1,n}(\mathbb{R})$.*

Prop 5: $O_n(\mathbb{R})$ est un groupe pour $\times$, appelé **groupe orthogonal** (d'ordre n).

Prop 6:
$\forall A \in O_n(\mathbb{R})$, $\det(A) \in \{-1;+1\}$.
$\forall f \in O(E)$, $\det(f) \in \{-1;+1\}$.
Attention, la réciproque est fausse (4)
Il devient alors naturel de classer ces endomph selon que leur déterminant est +1 ou -1. D'où le § C↴

Supplément (Ladegaillerie): Structure des matrices du groupe orthogonal.

***Prop**: Les **valeurs propres** d'une application orthogonale $\vec{f}$ sont de module 1. Si $\vec{F}$ est un **sev stable** par $\vec{f}$, alors son orthogonal $\vec{F}^{\perp}$ est également stable.*(8)

***Th**: Si $\vec{f}$ est une isométrie vectorielle d'un espace vectoriel euclidien $\vec{E}$, il existe une BON dans laquelle $\vec{f}$ a une matrice formée de blocs diagonaux du type:*

$$I_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, -I_q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ *pour un certain nombre de valeurs de θ, et des zéros partout ailleurs.*(9)
*On dit alors que **la matrice de $\vec{f}$ est sous forme normale.***

La mise sous forme normale de A signifie que $\vec{E}$ est somme directe orthogonale de :

- Un espace de dim. p sur lequel la restriction de $\vec{f}$ est l'identité.
- Un espace de dim. q sur lequel la restriction de $\vec{f}$ est une symétrie centrale (-Id)
- Des plans vectoriels sur lesquels la restriction de $\vec{f}$ est une rotation vectorielle.

C. Groupe spécial orthogonal. SO(E) = O⁺(E).

Def 3: $f \in O(E)$ est:
Un endomph. orthog. **direct** ssi $\det(f) = +1$
Un endomph. orthog. **indirect** ssi $\det(f) = -1$

Def 4 (et Prop): L'ens des automph orthog. directs de E est un sg de $O(E)$ (pour la loi o), appelé **groupe spécial orthogonal de E** et noté $SO(E)$.
Du point de vue matriciel, on définit parallèlement le **groupe spécial orthogonal** $SO_n(\mathbb{R})$, sg de $O_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$.

D. Notes.

(1) Démo (ii)⇒(i) par
$$2\langle f(x), f(y)\rangle = \|f(x)+f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2$$

(2) C'est le sg de GL(E) engendré par les réflexions.
Cf. ex 10.3.7 p.363.
(3) Les coefs des matrices sont dans ℝ car il s'agit d'ev Euclidiens, par Hermitiens (ℂ).

(4) Contre-exemple $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(8) (Ladegaillerie) Munir E d'une BON pour avoir A orthogonale. Poser λ valeur propre, et partir de la def° AX=λX. Transposer, conjuguer, on obtient $\bar{\lambda}\,{}^t\bar{X} = {}^t\bar{X} A$; multiplier à droite par λX=AX, il vient que $\bar{\lambda}\lambda({}^t\bar{X}X) = ({}^t\bar{X}X)$ et comme ${}^t\bar{X}X \in \mathbb{R}_+^*$, $\bar{\lambda}\lambda = 1$
Donc les valeurs propres de A sont de module 1, i.e. sont -1; +1 et $e^{i\theta}$ avec $\theta \neq k\pi$ (si $e^{i\theta}$ est valeur propre, alors son conjugué $e^{-i\theta}$ aussi car la poly. caract. est à coefs ℝ).
Soit $\vec{F}$ stable par $\vec{f}$; alors, comme $\vec{f}$ automph (bij), non seulement $\vec{f}(\vec{F}) \subset \vec{F}$ (stable) mais $\vec{f}(\vec{F}) = \vec{F}$.
$\forall \vec{x} \in \vec{F}, \forall \vec{y} \in \vec{F}^{\perp}, \vec{x}.\vec{y} = 0$. Or $\vec{f}$ conserve le pdt scal, donc $\vec{f}(\vec{x}).\vec{f}(\vec{y}) = 0$, or $\vec{f}(\vec{x}) \in \vec{F}$, et lorsque $\vec{x}$ décrit $\vec{F}$, $\vec{f}(\vec{x})$ décrit, $\vec{f}(\vec{F}) = \vec{F}$. Donc $\forall \vec{z} \in \vec{F}$, $\vec{z}.\vec{f}(\vec{y}) = 0$ ie $\vec{f}(\vec{y}) \in \vec{F}^{\perp}$ (stabilité de $\vec{F}^{\perp}$).

(9) (Ladegaillerie) On raisonne par récurrence sur la dimension. C'est vrai en dim.1 ($\vec{f} = \pm Id_{\vec{E}}$). En dimension 2 aussi, Cf. II., ensuite récurrce sur la dim.